

**UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD  
CONDICIONAL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO CON ESTUDIANTES DE GRADO  
UNDÉCIMO DEL INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

*Lady J. Arismendy  
Colegio Bolívar  
Soacha, Colombia*

*La teoría de la probabilidad es una rama importante dentro del desarrollo del pensamiento aleatorio, y en general, de la educación matemática, pues promueve el uso de heurísticas para realizar predicciones y tomar decisiones en torno a una situación del diario vivir. Si bien, en los lineamientos curriculares y en los estándares básicos de calidad se citan conceptos y temáticas en relación con la probabilidad que deben ser abordadas en las aulas de clase, las formas usuales de enseñanza ponen en evidencia el énfasis determinista que recae en la cultura escolar.*

## **INTRODUCCIÓN**

Este trabajo surge de un constante interrogar sobre la enseñanza de la probabilidad y particularmente de la probabilidad condicional, ya que enseñarla como una actividad de modelización y no como un conjunto de fórmulas resulta un reto bastante ambicioso y más aún cuando se sabe que son muy pocas las investigaciones realizadas en torno a esta temática, lo cual conlleva a la insuficiencia de trabajos relacionados con el diseño de secuencias didácticas que favorezcan el desarrollo del pensamiento probabilístico.

Distintos autores como Huerta y Lonjeda (2003) han puesto de manifiesto la existencia de errores sistemáticos y conductas estereotipadas persistentes en la toma de decisiones por parte de los individuos ante situaciones donde se usa la probabilidad condicional: “*Algunos de estos errores son de tipo psicológico, y una mera exposición de las leyes teóricas de la probabilidad puede no ser suficiente para superarlos. Incluso la existencia en el alumno de estos sesgos puede dificultar la asimilación de los conceptos formales*”. Así, resulta necesario indagar y construir actividades que sean llamativas y apropiativas para el estudiante con el fin de contextualizar conceptos que muchas veces en los libros de texto aparecen sueltos y desligados, sin ninguna significación. Con este enfoque se presentan algunas situaciones de enseñanza diseñadas bajo los fundamentos de la teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986).

De esta manera, resultó de gran interés contribuir al desarrollo de este pensamiento a través del planteamiento de una propuesta didáctica para la enseñanza de la probabilidad condicional en un contexto significativo para el estudiante. Con este enfoque, se planteó una secuencia de actividades bajo los fundamentos de la teoría de las situaciones didácticas en el Instituto Técnico Industrial Francisco José De Caldas, con la participación de 33 estudiantes de grado undécimo.

## DESARROLLO DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

El trabajo fue desarrollado en tres fases con distinta temporalización. La primera fase consiste en el diseño de la secuencia de actividades soportada por la teoría de las situaciones didácticas y de todas las variables inmersas en ella. La segunda fase hace alusión a la recolección de la información mediante protocolos, filmaciones y el trabajo concreto de los estudiantes y la última fase se enfoca en el análisis de la información recolectada, esta última de manera estadística.

### Situación fundamental<sup>1</sup>:

*Antes de ocurrir tan nefasto hecho, Garagoa era un pueblo en donde reinaba la paz y la prosperidad. La gente era muy cálida y procuraban el bienestar común. Sin embargo y por las circunstancias presentadas ese día, un trágico crimen conmocionó a toda la gente. Pero, ¿qué fue lo que ocurrió en realidad?*

*Eran las 12:00 m cuando el padre Amaro se disponía a officiar la misa; pero esto nunca ocurrió ya que fue violentamente asesinado. Los feligreses conmocionados por este hecho, se preguntaban: ¿por qué habrían de matar al padre? ¿Cómo lo mataron? Pero en aquel momento la gente, en medio del asombro, se limitaba a observar el cuerpo sin vida del padre.*

*Dentro de las pruebas que recopiló la policía en el momento del asesinato se encuentra el testimonio de una de las feligreses quién afirmó que el asesino era una persona que tenía dos características: Pelo castaño y por su apariencia física tenía entre 25 y 35 años.*

*De otro lado el pueblo está conformado por 1.300 habitantes de los cuales 750 son mujeres y el resto hombres. De las 1.300 personas 270 son niños entre los cero y doce años; 168 muchachos entre los 13 y los 17 años, 213 son personas entre los 18 y 27 años; 487 están entre los 28 y 40 años. El resto de la población tiene más de 40 años.*

*Se sabe que la gente del pueblo realiza diversas actividades dentro de las cuales el 45% de los hombres y el 20% de las mujeres se dedican a la agricultura; el 30% de los hombres y el 40% de las mujeres se dedican al comercio. El 25% de los hombres restantes se dedican a la pesca y el 40% de las mujeres a las labores del hogar.*

*Finalmente la mitad de la población tiene cabello castaño, 2/5 son de cabello negro, 1/13 son rubios y el resto son pelirrojos.*

***¿Cuál Es La Probabilidad Que El Asesino Sea Quién Mencionó La Feligrés?***


En la **situación de acción**, “*Relato del crimen*”, se planteó al estudiante preguntas relacionadas con nociones de azar y probabilidad. Se trató de poner a los estudiantes en estado de construir un modelo probabilístico implícito, por medio de previsiones o decisiones. De igual manera, el estudiante experimentó con la situación un conflicto cognitivo en el intento de hallar la probabilidad de encontrar el asesino sabiendo que era castaño y tenía entre 25 y 35 años de edad. A su vez, se consideró preciso que el estudiante expresara el modelo intuido en la fase de acción intercambiando información con otros compañeros, lo cual conllevó al diseño de la **situación de formulación**, “*Buscando culpables*”, en la que unos alumnos hacían el papel de emisores y otros de receptores. Fue así como en esta situación los estudiantes generaron nuevos razonamientos,

<sup>1</sup> Esta situación fue tomada del libro “Érase una vez un número” de Paulos J. y que fue contextualizada para el diseño de la propuesta didáctica.

conocimientos e ideas para comprender la situación, obteniendo una mejor información en cuanto a lo ocurrido el día del asesinato. Del mismo modo, la generación de espacios de socialización favoreció en los estudiantes la creación de un vocabulario apropiado, el cual les permitiera formular comprobaciones en relación con la identificación de sucesos, la asignación de probabilidades y la utilización de registros tabulares. Luego de la difícil tarea de poner por escrito las distintas hipótesis y concepciones con respecto a la solución de la situación, se implementa la **situación de validación**, “*Tras las pruebas: la ruta del asesino*” en la que se pretendió que el estudiante diera un paso más avanzado en el proceso de matemátización, calculando probabilidades correctamente y haciendo uso de la regla de la multiplicación, con el fin de probar la validez de su solución ante sus compañeros. Es decir, tratando de comprobar si la persona que cree haber cometido el asesinato lo es, dado que es castaño y tiene entre 25 y 35 años.

Con el objetivo de dar una adecuada finalización al proceso de enseñanza, involucrando todos los aspectos y nociones trabajadas se plantea la **situación de institucionalización**, “*El ADN descubre el asesino*”, en la cual se institucionalizó el conocimiento construido en clase, mostrando nuevas ideas, generalizaciones e interrelaciones entre diversos conceptos asociados al entendimiento de la probabilidad condicional.

A continuación se presenta una pequeña parte de la estructura de la secuencia didáctica:

<b>Actividad</b>	<b>Temática</b>	<b>Intención</b>	<b>Organización de aula</b>	<b>Indicadores de evaluación</b>	<b>Roles</b>
<p><u>EN LA CARRERA DEL OBSERVACION</u></p> <p><u>TRAS LAS PRUEBAS: DECLARACION DE TESTIGOS</u></p> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Experimentos compuestos.</li> <li>▪ Probabilidad condicional, conjunta y marginal.</li> <li>▪ Cálculo de probabilidades.</li> <li>▪ Regla de la multiplicación.</li> <li>▪ Sucesos contrarios.</li> <li>▪ Sucesos compuestos.</li> <li>▪ Axiomas de la</li> </ul>	<p>Determinar la validez y pertinencia de las estrategias utilizadas por los estudiantes para usar las nociones de probabilidad frecuencial en el cálculo de la condicional, conjunta y marginal.</p> <p><i>Posibilitar la explicitación de pruebas al igual que la explicación de las teorías relacionadas y los medios que subyacen en los procesos de demostración.</i></p>	<p>El trabajo de aula esta enfatizado al debate y la argumentación como condiciones necesarias para la socialización de la solución a la situación.</p> <p>Se trabajará con los grupos ya conformados, y a cada uno se le entregará el mapa del colegio simulando el pueblo de Garagoa.</p> <p>De este modo tendrán más pistas para encontrar el posible culpable.</p>	<p><i>Reconocimiento</i> Compara probabilidades simples, compuestas y condicionales.</p> <p><i>Interpretación</i> Diferencia la independencia de sucesos pertenecientes al mismo espacio muestral.</p> <p><i>Aplicación</i> Asocia correctamente variables.</p>	<p><b>Del profesor:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Determinar la validez y pertinencia de las estrategias utilizadas por los estudiantes para usar las nociones de probabilidad frecuencial en el cálculo de la probabilidad condicional.</li> </ul> <p><b>Del estudiante:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Explicitar las pruebas que realizan haciendo uso de los nuevos conocimientos.</li> <li>▪ Sustentar las nuevas estrategias como parte de una</li> </ul>

## RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La intención de utilizar algunos métodos estadísticos radicaba en buscar el grado de confiabilidad de las respuestas dadas y de los procesos vistos en los estudiantes. De igual modo, se pretendía establecer categorías de acuerdo con estas respuestas. Continuación se muestra el análisis estadístico que se realizó a la información proporcionada. Los criterios establecidos para realizar este análisis se presentan en la siguiente tabla:

<b>CRITERIOS ESTABLECIDOS PARA LAS SITUACIONES DIDACTICAS</b>	
<b>Cat N° 1</b>	Utiliza la probabilidad para tomar decisiones en determinado contexto. De igual manera se apoya en diferentes representaciones las cuales le permiten describir y cuantificar. Sus justificaciones son claras y coherentes.
<b>Cat N° 2</b>	Calcula la probabilidad de un evento pero no es capaz de tomar una decisión en relación con este. Sus registros son claros aunque resulten algo informales.
<b>Cat N° 3</b>	Presenta dificultad al diferenciar sucesos. Sin embargo el cálculo de probabilidades simples resulta de fácil comprensión.
<b>Cat N° 4</b>	Calcula incorrectamente la probabilidad de un evento. Si bien utiliza diferentes sistemas de representación. Estos solo le permiten realizar una lectura de los datos.
<b>Cat N° 5</b>	No tiene en cuenta el planteamiento de la situación. Sus registros son demasiado informales.
<b>Cat N° 6</b>	Su trabajo se dedica a reducir muestras. No utiliza algún tipo de registro que le permita dar cuenta de la solución a la situación.
<b>Cat N° 7</b>	Asigna probabilidades en términos cualitativos.
<b>Cat N° 8</b>	No sistemática.
<b>Cat N° 9</b>	No sabe. No responde.

A partir de esta clasificación se sistematizó la información y se diseñaron unas tablas que evidencian la categoría en la que se encuentra cada estudiante en determinada actividad con el número específico de ítems propuestos para cada una.

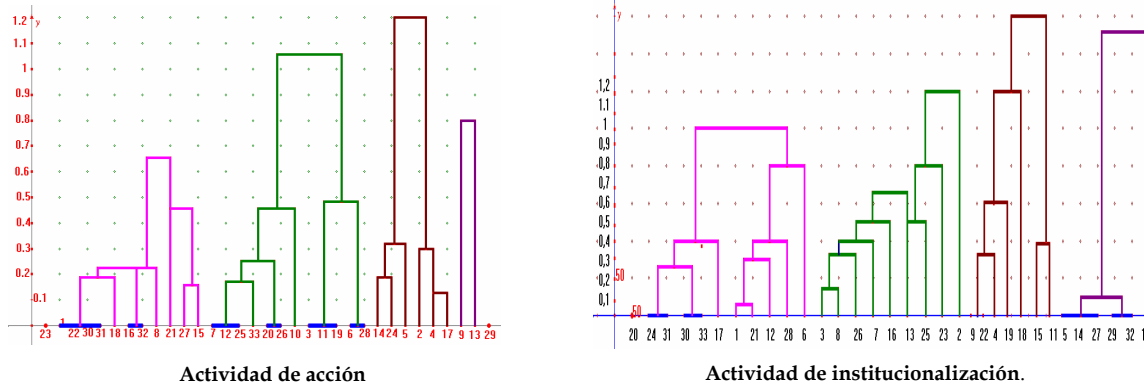
El siguiente paso fue definir una medida de similitud, en este caso, la distancia euclídea la cual permitió cuantificar el grado de similitud en las respuestas dadas por los estudiantes. Seguido de esto, se construyó una tabla en la que se relacionaba la distancia, promedio, el cluster y el número de cluster conformados.

Para construir esta tabla se parte del hecho que cada estudiante es un cluster. Enseguida se ubican los dos estudiantes que se encuentran a menor distancia (para ello el diseño de la matriz) esto es, más cerca y se incluye en el primer cluster. A continuación, se ubica el estudiante que se encuentra a al menor distancia de los dos anteriores y esto se logra con el calculo de la distancia promedio. Este proceso se repite hasta agrupar los 33 estudiantes.

Luego se determina el número de cluster que mejor se adapta a los datos, en particular para la investigación se han establecido seis. Se le da un nombre al cluster de acuerdo con el trabajo desarrollado por los estudiantes en estos.

Finalmente se realiza la representación del cluster.

A continuación se muestra la representación del cluster actividad diagnóstico y el cluster actividad de institucionalización cada una de las cinco actividades, en la cual el eje X representa el código del estudiante y el eje Y la distancia promedio.

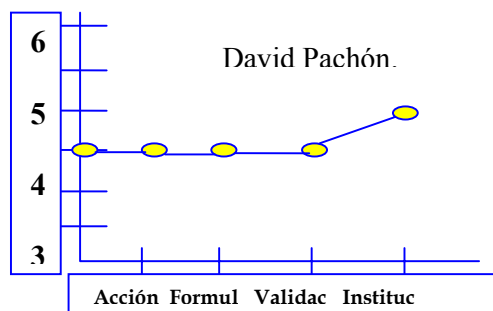
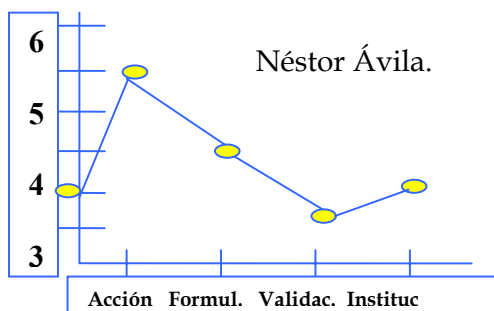


Con estos instrumentos podemos decir lo siguiente:

Se encontró que algunos estudiantes han razonado de forma aritmética y esto debido a la forma en que las cantidades se han presentado:

- La gran mayoría de estudiantes intentan resolver el problema involucrado en la situación mediante la utilización de tablas de doble entrada.
- Los estudiantes resuelven la situación como si el problema fuera de asignación, empleando para ello la regla de Tres.
- El 90% de los estudiantes presentan confusión entre las probabilidades  $P(A/B)$  y  $P(B/A)$ , denominada por Falk (1988) como la confusión de la inversa.
- La gran mayoría, intenta establecer relaciones entre las cantidades involucradas y expresadas de diversas maneras; razón, proporción, etc.(Ver situación fundamental)
- De igual manera se evidencia confusiones entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional.
- Un 20% de los estudiantes utiliza la información proporcionada para construir gráficos estadísticos los cuales solo permiten leer las cantidades presentadas sin tener en cuenta el planteamiento de la situación y la decisión que deben tomar.

Ejemplo de dos estudiantes: en la primera figura se observan estudiante que tiene mucha movilidad al trabajar con situaciones en los que se evidencia la composición de sucesos. En la segunda figurase presenta un ejemplo de un estudiante que tiene poca movilidad al trabajar con situaciones en los que se evidencia la composición de sucesos:



## REFERENCIAS

- HUERTA M., LONJEDO A. La resolución de problemas de probabilidad condicional. En Castro Flores. Investigación en educación matemática. Séptimo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática. Universidad de Granada. 2003.
- HUERTA M., LONJEDO A. Los problemas de probabilidad condicional en la enseñanza secundaria. Comunicación presentada en las IX jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (JAEM). 2003.
- HUERTA M., LONJEDO A. La resolución de problemas de probabilidad condicional: Un estudio exploratorio con estudiantes de bachillerato. Universidad de Valencia.
- MEN. Estándares curriculares (2002) y Lineamientos curriculares (1998). Diseño curricular para la enseñanza en educación media y vocacional.
- ORTIZ de HARO, J. La probabilidad en los libros de texto. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Grupo de educación estadística. 2002
- ROCHA P. (2005) La educación estadística; algunos elementos para el análisis. Memorias XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística 2005. Universidad Distrital.
- ROCHA P. (2005) Una propuesta para el cambio de las prácticas docentes en la enseñanza de la probabilidad y estadística. Memorias séptimo encuentro colombiano de matemática educativa. Universidad pedagógica y tecnológica de Colombia.
- ROMERO, y otros. Matemáticas para todos. El sentido de la profesión profesor(a) de matemáticas. Centro de investigaciones y desarrollo científico. Bogotá, Colombia. 2002.
- SERRANO, L. Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Departamento de didáctica de la matemática. Granada. 1996.