LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS: UN ASUNTO DE EXPERIMENTACIÓN Y SIMULACIÓN

Edgar D. Jaimes, Jorge A. Martínez y Gabriel Yáñez
Instituto Técnico Industrial,
Escuela Industrial de Oiba
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

En este trabajo se presentan algunos de los resultados obtenidos en una investigación que buscaba indagar por los procesos que en sus razonamientos (formación de significados) vivieron unos estudiantes entre 12 y 15 años de un colegio oficial en un municipio en la provincia en el departamento de Santander, con los que se desarrolló un trabajo de experimentación y simulación de experimentos aleatorios conducente a crear significados alrededor de la ley de los grandes números.

PRESENTACIÓN

En la mayoría de textos de matemáticas, en los que tienen algún capítulo dedicado a la probabilidad, es común el uso del lenguaje formal algebraico como única forma de representación utilizado para la enseñanza de los conceptos relacionados con la probabilidad. Lo anterior, como se ha demostrado en muchas investigaciones, no permite una construcción significativa de los conceptos relacionados con experimentos aleatorios, por el contrario, ha generado y reforzado algunas malas concepciones. Por consiguiente, la pregunta obligada es:

¿Qué metodología de trabajo es conveniente utilizar en el salón de clase para posibilitar la construcción significativa de estos conceptos?

Para una persona, la construcción significativa de un concepto está ligada a su experiencia, razón por la cual el trabajo experimental con fenómenos aleatorios en el salón de clase es un buen principio para la formación de estos conceptos. Pero, si bien es cierto que el realizar experimentos ayuda a generar una mayor comprensión alrededor del experimento aleatorio, en aspectos como la identificación del espacio muestral y de algunas otras características de la naturaleza de las pruebas experimentales, también es cierto que dadas las pocas repeticiones que finalmente se realizan, sea muy difícil que los estudiantes perciban alguna regularidad en el comportamiento de las secuencias aleatorias que permita dar algún significado a su experiencia y generar conceptos claros sobre la probabilidad de un suceso, como se evidencia, por ejemplo, en Reátiga (2004). Una respuesta a las pocas repeticiones y a mayor cantidad de muestras la brinda la herramienta computacional.

Para respaldar el uso de la experimentación como camino hacia aprendizajes significativos, Fischbein (1975) a través de una serie de investigaciones concluyó que las personas, desde muy temprana edad, poseen una intuición primaria respecto a las frecuencias relativas asociadas a los resultados de las repeticiones de un experimento aleatorio. Más específicamente, añade:

> *"Por ejemplo, para crear nuevas intuiciones correctas de probabilidad el educando debe ser activamente involucrado en un proceso de realización de experimentos aleatorios, de adivinar resultados y evaluar posibilidades de confrontar resultados individuales y grupales con unas predicciones realizadas a priori, etc. Nuevas intuiciones de probabilidad correctas y potentes no pueden ser producidas simplemente practicando fórmulas de probabilidad." (*Fischbein, 1982, p.12).

Ahora bien, la idea de realizar experimentos es para observar la estabilidad que adquieren las frecuencias relativas asociadas a cualquier resultado posible cuando se aumenta el número de repeticiones, tal y como lo plantea la ley de los grandes números y que se constituye en el fundamento del enfoque frecuencial de la probabilidad, considerado hoy, por la mayoría de los educadores en probabilidad y estadística, como mucho más significativo que el enfoque clásico. En este orden de ideas ¿será que tener la intuición de las frecuencias relativas se traduce en una buena comprensión de esta ley de los grandes números?, que en esencia afirma que cuando se repite el experimento muchas veces las frecuencias relativas asociadas a un evento se estabilizan alrededor de la probabilidad de ese evento?

Investigaciones como las realizadas por Pratt (1998), Yáñez (2003) y Reátiga (2004) muestran que la respuesta no es positiva. La comprensión de la ley de los grandes números exige la comprensión de otros elementos que van más allá de la simple asociación entre la distribución de los resultados posibles y las frecuencias relativas.

Un estudio que permite conocer un poco más la forma como los estudiantes razonan alrededor de esta ley es el trabajo de Pratt (1998) donde se relatan los resultados de un estudio dirigido a observar cómo un grupo de niños de diez años construían significados para la aleatoriedad en un ambiente computacional llamado Chance-Maker cuyo entorno pedagógico particular es un dominio estocástico de abstracción. La intención del autor era estudiar las intuiciones previas de los estudiantes y analizar las posibles modificaciones o nuevos significados que los niños podían generar dentro del micromundo. Pratt estudió la conformación de *redes* formadas entre las intuiciones estocásticas de los niños con las herramientas basadas en el computador lo que les permitió, a algunos de ellos, descubrir la relación entre la conformación del espacio muestral y las frecuencias relativas para grandes repeticiones de los experimentos aleatorios asociados.
De aquí surgió el interés en adoptar la herramienta computacional con un grupo de 12 estudiantes entre los 12 y 15 años de edad , para estudiar los efectos de la simulación computacional en el aprendizaje de la ley de los grandes números a partir de una situación problema contextualizada y el uso de un simulador aleatorio llamado *Probability Explorer*.

En el apartado siguiente presentamos brevemente la metodología de investigación implementada. En el apartado Análisis de Resultados se presentan algunos apartes de la conversación que se tuvo con Camilo (uno de los casos) mientras daba respuesta al problema que se le propuso debía responder con ayuda del computador en la fase de evaluación al final de la experiencia. Finalmente, presentamos las conclusiones de este trabajo donde explicamos brevemente los resultados que consideramos dan cuenta del proceso vivido por algunos estudiantes que alcanzaron una buena comprensión de la ley de los grandes números.

METODOLOGÍA

La investigación realizada es cualitativa, ya que más que cifras presentamos e intentamos explicar los procesos mentales vividos por los estudiantes a través de las actividades realizadas. En particular, nos limitamos a referir los procesos vividos por dos estudiantes que adoptamos como casos. La población objeto de estudio fue un grupo de 40 estudiantes de octavo grado entre los 12 y 15 años del Instituto Técnico Industrial de Puente Nacional (zona rural en el departamento de Santander), los cuales no habían recibido ningún tipo de enseñanza formal en los conceptos de probabilidad y no fueron sometidos a ningún tipo de instrucción en el desarrollo de la investigación.

La duración del proyecto fue de un año y su etapa de aplicación fue de un mes aproximadamente (8 sesiones, 24 horas en total). La recolección de información se hizo a través de los talleres escritos de cada actividad, los archivos de computador en el editor de texto sobre las simulaciones, entrevistas individuales vídeo grabadas de cada actividad (20 horas en total). Finalmente se editó un vídeo de la experiencia que resumió el proceso de investigación en veinte minutos y algunos de los resultados encontrados.

Durante el trabajo de campo con los estudiantes se desarrollaron una serie de actividades en doce momentos, que comenzaron con un análisis diagnóstico de las concepciones de los estudiantes respecto a las secuencias aleatorias y que continuaron a partir de los resultados experimentales obtenidos de una promoción de paletas que se realizó en el colegio, la cual giraba en torno a una apuesta relacionada con el resultado del lanzamiento de una moneda en donde si el cliente acertaba en el resultado se ganaba una paleta y, en el caso contrario, debía pagar $200.

Inicialmente se propuso a los estudiantes este problema de la promoción de paletas para que analizaran su conveniencia a largo plazo. Posteriormente, los mismos estudiantes efectuaron la promoción en la hora de recreo después de organizarse en grupos en diferentes mesas que se caracterizaban por una forma especial de lanzar la moneda, por ejemplo, dejando que cayera al suelo o recogiéndola en la mano. Con los resultados obtenidos, los estudiantes retomaron sus análisis previos, los confrontaron con los datos de la experiencia y generaron otros nuevos.

La necesidad de mayores datos condujo a los estudiantes a diseñar modelos que representaran la situación real y que permitiera su simulación tanto física como computacional. El modelo consistió en remplazar la escogencia del cliente por el lanzamiento de otra moneda, de tal forma que si los resultados de las dos monedas coincidían el concursante ganaba la paleta, en caso contrario, perdía sus doscientos pesos.

Después de experimentar física y computacionalmente realizando muchas repeticiones, los estudiantes diseñaron una nueva promoción que garantizaba ganancias utilizando otro dispositivo aleatorio: la extracción de balotas de una bolsa que contenía bolas de dos colores, 2 bolas rojas y 3 bolas amarillas.

Todas las actividades se centraban en el análisis de los resultados que, si bien en un principio, realizaron solamente a partir de los datos numéricos, luego pudieron hacerlo a través de las múltiples representaciones dinámicas ofrecidas por el micromundo *Probability Explorer.* La confrontación de respuestas y sus discusiones en los diversos momentos de socialización entre estudiantes y docentes investigadores, permitieron el esclarecimiento de los significados que los estudiantes se fueron formando a través de las actividades desarrolladas.
Por último, se realizaron una evaluación escrita y una computacional para contrastar sus respuestas con el diagnóstico inicial y poner a prueba las nuevas intuiciones y significados alrededor de la ley de los grandes números.

La evaluación computacional consistió de un solo problema: estimar el número de bolas de dos colores distintos que contiene una urna utilizando solo extracciones con sustitución. En la evaluación escrita se trataba de interpretar los valores de probabilidad de diversos fenómenos aleatorios en términos de los posibles resultados para pocas y muchas repeticiones.
En la prueba diagnóstica y la actividad de experimentación real se trabajó con la totalidad de la población, pero después de analizar los resultados del diagnóstico, el interés de los estudiantes y la disposición de los padres de familia para permitir a los estudiantes asistir a la institución en horario extra clase, el grupo se redujo a doce estudiantes que desarrollaron la totalidad de las actividades propuestas, exceptuando la fase final de evaluación que solo se efectuó con dos estudiantes.

Si bien se tienen resultados que evidencian los cambios sufridos por los estudiantes en sus concepciones alrededor de la probabilidad, solo presentamos aquí los resultados que nos permiten establecer si la estrategia aplicada fue útil a la hora de construir el sentido de la Ley de los Grandes Números y formar un significado adecuado del concepto de probabilidad. En especial tuvimos en cuenta el proceso como los estudiantes construyeron su red de significados a partir de intuiciones relacionadas con las frecuencias relativas mediante la coordinación de significados.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Dada la extensión y riqueza de los resultados obtenidos en esta investigación, y recordando que solo presentaremos los resultados obtenidos respecto a la construcción del significado conceptual de la ley de los grandes números, nos limitamos a transcribir algunos apartes de la conversación realizada con Camilo (uno de los estudiantes seleccionados como caso) cuando trabajaba en el computador e intentaba dar respuesta a la pregunta de conocer el número exacto de bolas que estaban dentro de una urna que contenía seis bolas negras y dos bolas azules.

Camilo comienza a simular haciendo extracciones una por una esperando encontrar el número de balotas de la urna en pocas extracciones.

> *Profesor: ¿Qué pasa?*
> Camilo simuló extracciones obteniendo primero una bola azul y luego una negra. Observó simultáneamente las representaciones de tabla y las gráficas circular y de barras.
> *C: No sé, no puedo.*
> *P: Solamente puede simular.*

Continuó incrementando las extracciones anteriores una por una hasta obtener el resultado de 14 extracciones: cinco azules (35,71%) y nueve negras (64,29%). Luego borró los resultados y simuló el experimento ejecutando directamente 10 extracciones y obtuvo dos azules (20%) y ocho negras (80%).

C: Pues será una bola azul y cuatro negras.

Camilo cae en el sesgo conocido como la ley de los pequeños números (Kahneman y cols. 1982), olvidando momentáneamente el significado de variabilidad a corto plazo del cual había dado muestras de conocer en las experimentaciones realizadas previamente. Este olvido es una evidencia de que el significado creado de “variabilidad” en los resultados a corto plazo, aún está conectado débilmente con el significado de “estabilidad” de los resultados a largo plazo.

.....

P: ¿Y si vuelve a hacer otras 10 extracciones?

C: 5 azules (50%) y 5 negras (50%).

P: ¿Por qué escogió el 10?

C: Pues porque no creo que la bolsa tenga más de 10 balotas.

P: Entonces ¿El número de extracciones que debe realizar depende del número de balotas?

C: Pues no, solamente que con 10 hay mas posibilidades de que me caigan exactos los porcentajes, porque si hago por ejemplo 100 extracciones me puede salir 50.3% de negras o azules, entonces eso no me conviene porque necesito saber el número exacto de balotas.

Para facilitar sus cuentas Camilo opta por realizar pocas repeticiones porque las posibilidades de obtener expresiones exactas aumentan y le facilitan la estimación buscada.

P: Muestre con 100 extracciones.

C: Si ve que salen porcentajes con decimales, y necesito dar un número exacto de balotas.

Al finalizar la simulación con 100 extracciones se obtuvo 29 bolas azules (29%) y 71 bolas negras (71%), que se reflejaron en las representaciones tabular y gráfica de la pantalla.

P: ¿Qué sucedió ahí con las 100 extracciones?

C: Parece que hubiera 3 bolas negras y 1 bola azul, ó 6 negras y 2 azules.

...

Borró los resultados y volvió a simular con 100 extracciones

C: Mire, 73% de bolas negras y 27% azules. O sea, si hubiera cuatro balotas en la bolsa entonces 3 bolas serían negras y 1 azul.

P: Pero en la anterior simulación era diferente. Parecía ser la tercera parte azul y el resto negra (29% y 71% respectivamente).

Nuevamente simulo con 100 extracciones diferentes.

C: Mire 24% para las azules y 76% para las negras (A = 24 y N = 76).

P: Como podría estar seguro de esa relación que usted dijo (1 bola azul y 3 negras).

C: No estoy seguro completamente… ¿únicamente simulando?

Aquí el profesor decide dar un empujón a Camilo con el ánimo de recordarle significados adquiridos previamente.

P: Sí. Por ejemplo, abra otra ventana y configure una urna de la cual usted sepa como va a salir el gráfico.

Camilo configuró en otra ventana una urna con 1 bola roja y 2 amarillas, y ejecutó 100 extracciones.

P: ¿Cómo cree que va a salir el gráfico?
C: Una tercera parte para la roja y dos terceras partes para la amarilla
Ejecutó la simulación y abre solo el gráfico circular para su análisis.
...
C: Entonces yo siempre he creído que el programa trata como de basarse en eso, entonces de pronto… no pero… ¿para hacer más extracciones?
Borró los resultados anteriores y ejecutó 250 extracciones con velocidad lenta, observando detalladamente los cambios en las múltiples representaciones.
P: ¿Qué está sucediendo ahí? (Mientras el simulador genera resultados con baja velocidad).
C: Pues que la balota roja intenta irse mucho para acá (ser menor de 1/4 de circunferencia), algo que no debería pasar. Pero me estoy dando cuenta de que con más lanzamientos trata de ***estabilizarse más*** *en los valores que yo dije, es decir 1/3 de las rojas. Si ve que al principio nos daba valores que no correspondían en cambio con muchos lanzamientos trata de dar más preciso, donde debe ser.*
Al realizar el proceso contrario: conocida la composición de la urna describir el comportamiento de las extracciones, Camilo logra coordinar los significados que relacionan el número de extracciones y el valor de probabilidad.
P: Entonces ¿Qué cree que debe hacer para averiguar el número de balotas negras y azules de la urna?
C: Hacer la simulación por ahí con 250 extracciones como aquí.
P: Esperemos a ver qué resultados obtiene en esta ventana. ¿El gráfico qué refleja?
C: Hay como una tercera parte de bolas rojas, pero un poco corrida (inexacta).
P: ¿Qué pasa a medida que aumentan las extracciones?
C: Trata de irse más para donde debe, o sea a 1/3, me dio 29.2% -refiriéndose a la frecuencia de balotas rojas *-). Para que de más o menos exacto no sé cómo hacer.*
P: ¿Está mejor que con las 50 extracciones o no?
C: Pues un poco, sí porque con las 50 se pasó un 5% y aquí ya un 4% no fue mucho la diferencia pero mejoró un poco (refiriéndose la frecuencia de balotas rojas).
P: Entonces ¿Qué más puede hacer?
C: No sé, porque seguir aumentando la cantidad de extracciones no es que me halla dado resultado.
P: ¿Cree que 250 extracciones son suficientes para que le dé lo esperado?
C: Sería probar de otra forma.
...
P: ¿Para cuántas extracciones?
C: 366 extracciones.
P: ¿Qué pasa si continúa la simulación con la urna?
C: Vemos que está como cerca, o sea como que con muchas extracciones es más exacto. Digamos que está la urna en la realidad y vamos a hacer 5 extracciones, entonces sacamos una por una las balotas y puede que en estas cinco primeras extracciones salga la misma bola y luego empiecen a salir las otras. A largo plazo nos vamos dando cuenta de los porcentajes porque al principio si probábamos con pocas extracciones, no va a dar

como queríamos, pero con muchas extracciones, aquí llevamos 520 (refiriéndose a la simulación que continuó ejecutando), *ya los porcentajes nos van a convenir más.*

P: ¿Nos están conviniendo?

C: Es decir, que de acuerdo a mi urna el resultado de balotas rojas ya es de 1/3.

P: ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

C: Un tercio.

P: O sea, que si voy hacer 10 extracciones ¿Cuántas bolas cree que van a salir rojas?

C: De 10 extracciones por ahí 3 o 4 bolas rojas. Es que con poquitas extracciones ya es más difícil porque uno va a dar el porcentaje.

P: ¿Cuándo funciona el valor de la probabilidad?

C: Cuando es una gran cantidad.

En este momento, el profesor decide sacar a Camilo del contexto de urnas para plantearle una situación con contexto real.

P: En las noticias escuchamos mucho que la probabilidad de llover es del tanto por ciento ¿Cierto?

C: Sí.

P: Si sale en las noticias: "La probabilidad de que llueva en esta mañana es del 20%" ¿Usted qué diría?

C: Que de todas formas hay poquitas posibilidades de que llueva, pero de todas formas puede llover, pero si vamos a probar un solo día, esa posibilidad puede fallar en el caso de que no llueva. En cambio si vamos a probar en 10 días, ya unos días puede llover y otros no, se supone que la mayoría de días no lloverán, entonces ahí si se sabe si más o menos coincide el porcentaje.

P: O sea que si por ejemplo, le dicen que la probabilidad de lluvia para los próximos 10 días es del 20% y llueve 8 días ¿Qué puede decir de este pronóstico?

C: Pues ahí yo creo que la probabilidad está mal, porque de todas formas el 20% es contrario a los resultados y eso ya es difícil de que pase.

P: ¿Estaría mal calculada esa probabilidad?

C: Pues yo creo.

P: ¿Cuándo sería cierta esa probabilidad?

C: Pues yo creo que a largo plazo pues digamos que de esos 10 días, 8 días llovió pero después a los siguientes 10 días ya no llueve y siguen cambiando unos días sí, otros no, hasta que empiece como a coger forma la probabilidad.

Detallemos que el estudiante aún no logra coordinar por completo el significado de "variabilidad" y el de "probabilidad". Es decir, no logra explicar el por qué no se refleja el valor de probabilidad en los resultados aleatorios a corto plazo. Es decir, complementa el significado global anterior así: **"**Si el valor de probabilidad no se refleja a corto plazo en las frecuencias relativas, entonces el valor de probabilidad falla a corto plazo".

Sin embargo, logra coordinar muy bien el significado de "estabilidad" y "probabilidad" al explicar como se genera esa estabilidad a partir de los cambios que se presentan en las secuencias aleatorias a medida que se incrementan las pruebas. Y algo importante, el estudiante logra validar sus significados fuera del micromundo en otros contextos.

P: ¿Cuándo tomaría forma esa probabilidad del 20%?
C: Pues mientras más días.
P: ¿Un año por ejemplo?
C: No, por ahí en 2 meses ya se sabe.
P: ¿Se podría conocer esa probabilidad o cree que es imposible?
C: Como el noticiero tiene equipos especiales, que estudian las nubes y todo eso para conocerlas y así más o menos calculan cómo pronosticarlos.
P: Listo, volviendo a nuestro problema.
C: Pues aquí con 750 extracciones nos dimos cuenta que fue más exacto.
Obtuvo en la tabla de frecuencias las siguientes cantidades de la urna configurada por él con una bola roja y dos amarillas: Rojas el 33,2% y Azules el 66,8%.
C: Entonces sería volver a la otra ventana y probar con 750 extracciones.
C: Acá nos dio 24,67% de bolas azules que aproximando nos da 25% y 75,33% de bolas negras que aproximando daría 75%). Entonces yo digo que el 25% de las balotas que hay en bolsa son azules y 75% son negras.
P: Entonces ¿Cuántas bolas podrían haber en la urna?
C: Pues podrían haber 1 y 3 ó 2 y 6 y así sucesivamente ¿Sí?
P: O sea que por cada…
C: Pues que por cada bola azul hay tres negras.
P: ¿Podría asegurar eso?
C: Sí.
P: ¿Por qué?
C: Pues porque con este experimento nos dimos cuenta que casi funciona, o sea entre más lanzamientos más exacta será la respuesta.
P: ¿Qué pasaría si se duplican a 1.500 extracciones?
C: Pues sería aun más exacta. Ahí ya hay posibilidades de que saliera 25 y 75%, o con una diferencia mínima.
P: Entonces ¿Cuándo funciona la probabilidad de un evento?
C: Pues mientras más largo el tiempo o lo que se esté manejando mientras mayor sea la cantidad pues más exacta es.

Este proceso inverso de buscar el valor de probabilidad que corresponde a un espacio muestral desconocido, nos permitió detectar fallas en las conexiones establecidas entre los significados iniciales y que a través de este proceso el mismo estudiante con el acompañamiento del docente halla podido afianzar y coordinar eficazmente los significados para generar una comprensión de la Ley de los Grandes Números que fue el significado que finalmente le permitió resolver la situación.

Ahora si podemos evidenciar en el estudiante una comprensión completa del significado de la Ley de los Grandes Números a partir de la coordinación de los significados de "variabilidad" y "estabilidad" de los resultados de un experimento aleatorio a corto y largo plazo. El siguiente esquema muestra la forma en que se generaron y coordinaron los significados a través de la evaluación computacional.

…
P: Acá en el problema ¿Tiene la misma probabilidad de salir bola negra que bola azul?

C: No, yo creo que por cada bola azul hay tres negras.
P: Vamos a averiguar entonces como esta finalmente conformada la urna.
C: Sí.
P: Usted dijo que estaban en relación...
C: 1 azul y 3 negras.
P: Ahora vamos a desbloquear el icono que permite ver la configuración de la urna.
C: Dos bolas azules y seis negras. Sí estaba bien.
P: ¿Contento o no?
C: Sí.

El planteamiento del problema que indagaba por la composición de la urna conociendo las frecuencias relativas, contrario al que se había realizado previamente como era predecir el comportamiento de las frecuencias relativas conociendo la composición de la urna, nos permitió ver que las conexiones entre los significados generados por el estudiantes no eran lo suficientemente fuertes y presentaban inconsistencias (como la ausencia del significado de "variabilidad" a corto plazo). Fue precisamente el volver al problema directo lo que tal vez catapultó en Camilo la comprensión del significado total de la ley de los grandes números que le permitió estimar el contenido de la urna.

CONCLUSIONES

La construcción conceptual de la ley de los grandes números y el concepto de probabilidad asociado al enfoque frecuencial de la probabilidad requiere de tres significados básicos como son: La variabilidad de los resultados asociados a la repetición de un experimento aleatorio; el significado de estabilidad de las frecuencias relativas y la relación entre la distribución de los resultados en el espacio muestral y el valor de probabilidad. A continuación analizamos cada uno de estos significados.

El surgimiento del significado de variabilidad

Aunque para nosotros este significado era el primero que debería surgir por la aparente sencillez de encontrar la "diferencia" de resultados en pocas pruebas del experimento (con monedas y con balotas), en realidad para los estudiantes no fue tan simple porque a simple vista las características de las secuencias aleatorias y de las frecuencias absolutas para un mismo experimento eran superficialmente siempre diferentes al repetir el experimento a la luz del pensamiento determinista de cada estudiante; llegando al punto que se hacía obvio que todo era diferente. En pocas palabras para que el estudiante pudiera construir el significado claro de "variabilidad" era necesario primero el surgimiento del significado de "estabilidad". Es algo así como la idea genética de Piaget respecto a la aleatoriedad: para que el muchacho comprenda la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios y su carácter de impredicibilidad y la falta de relaciones causales es absolutamente necesario que comprenda totalmente la relación causal. Es el manejo de la contradicción, se requiere lo contrario para comprender la propiedad inicial, se debe contar con elementos que no cumplen la propiedad para percibir la propiedad en sí misma, no basta que existan objetos que la posean es necesario que existan lo que no la poseen.

El significado de estabilidad

Nos referimos aquí a la capacidad del estudiante para percibir en el resultado de las frecuencias relativas la tendencia hacia un valor específico al repetir el experimento. Este significado requiere tener en cuenta dos aspectos para su activación: El número de pruebas y la repetición. Este significado surgió de manera más efectiva en los estudiantes que estuvieron bajo el continuo seguimiento a través de las entrevistas, es decir, al parecer la necesidad de expresar verbalmente las respuestas a las preguntas al interactuar con el docente investigador, de alguna manera permiten al estudiante "ver" y expresar lo que antes no era posible cuando expresaba por escrito sus respuestas En general, los estudiantes no fueron capaces de apropiarse de este significado y de expresarlo claramente debido a la influencia de las malas concepciones generadas alrededor de dicho análisis.

Relación del espacio muestral y el valor de probabilidad

En el caso de uno de los estudiantes evaluados al final (Camilo), este significado surge de manera significativa cuando analiza las condiciones de la nueva promoción con un espacio no equiprobable y de alguna manera predice que la probabilidad de sacar una bola roja depende de la cantidad de bolas que hay en la bolsa: "Si hay dos bolas rojas y 3 amarillas, entonces la probabilidad de ganar es del 40% y de perder de 60%". Esta conjetura fue rápidamente validada por los resultados de la experimentación física y respaldada por la simulación computacional, lo que le permitió asociar a cada espacio muestral un valor de probabilidad. Este significado marcó la diferencia con los demás compañeros a la hora de construir el significado de la ley de los grandes números. Con este nuevo significado fue más sencillo para Camilo dar sentido al significado de estabilidad de las frecuencias relativas centrando su atención en buscar la forma de encontrar el valor de probabilidad en los resultados de las simulaciones. Para ello, Camilo relacionó el espacio muestral con el valor de probabilidad y a su vez relacionó el valor de probabilidad con la frecuencia relativa al condicionar el "cumplimiento" del valor de probabilidad al hecho de que dicho valor debía reflejarse en las frecuencias porcentuales, encontrando que esta condición sólo se cumplía al realizar el experimento a largo plazo como lo pudo constatar en el simulador. Estas evidencias de comprensión de la Ley de los Grandes Números por parte de Camilo fue ratificada en la prueba final escrita cuando se le presentaron espacios muestrales finitos y se le pidió que realizara sus predicciones a corto, mediano y largo plazo.

REFERENCIAS

Fischbein (1975). The Intuitive sources of Probability Thinking in Children. Dordrecht: Reidel.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). Reasoning under uncertainty: Heuristic and biases. Cambridge University.

Pratt, D. (1998). The Co-ordination of Meanings for Randomness. For the Learning of Mathematics 18 (3), p. 2-11.

Reátiga, A. (2004). Confrontación entre realidad y modelo teórico: Una propuesta para desarrollar la intuición probabilística en los niños de sexto grado. Tesis de especialización, no publicada. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

Yáñez, G. (2003). Estudios sobre el Papel de la Simulación Computacional en la Comprensión de las Secuencias Aleatorias, la Probabilidad y la Probabilidad Condicional. Tesis de doctorado, no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional CINVESTAV - IPN. México D. F.